Aufgabe 2.1:
(a)

Lösung: Seien $R(X)$, $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $S(Y)$, $Y = \{B_1, \ldots, B_m\}$, $n, m \geq 1$ Relationsschemata und $r \in \mathrm{Rel}(X)$, $s \in \mathrm{Rel}(Y)$ zwei entsprechende Instanzen.

Mittels Umbenennung erreichen wir zunächst die Disjunktheit der Formate X und Y. Seien hierzu $X' = \{R.A \mid A \in X\}$ und $Y' = \{S.B \mid B \in Y\}$. Sei dann $\delta(A) = R.A$, $A \in X$ und $\delta(B) = S.B$, $B \in Y$.

$t := r \times s$ ist eine Instanz eines Schemas $T(X' \cup Y')$, wobei

$$t = \delta[X, X']r \bowtie \delta[Y, Y']s.$$

(b)

Lösung: Seien $R(X)$, $X = \{A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_k\}$ und $S(Y)$, $Y = \{B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_k\}$, $n, m \geq 1$, $k \geq 0$ Relationsschemata, wobei $\{C_1, \ldots, C_k\} = X \cap Y$.

Seien X' und Y' wie unter (a) und sei $Z' = X' \cup (Y' \setminus \{S.C_1, \ldots, S.C_k\})$.

Seien $r \subseteq \mathrm{Rel}(X)$, $s \subseteq \mathrm{Rel}(Y)$ zwei entsprechende Instanzen von R und S.

$$r \bowtie s = \delta^{-1}(\pi[Z'](\sigma[R.C_1 = S.C_1 \wedge \ldots \wedge R.C_k = S.C_k](\delta[X, X']r \times \delta[Y, Y']s))).$$

Aufgabe 2.2:

1)

Lösung:

$$\pi[Y](\sigma[\alpha]r)$$
$$\equiv$$
$$(\textit{Definition der Selektion})$$
$$\pi[Y](\{\mu \in \mathrm{Tup}(X) \mid \mu \in r \wedge \mu \text{ erfüllt } \alpha\})$$
$$\equiv$$
$$(\textit{Definition der Projektion})$$
$$\{\mu \in \mathrm{Tup}(Y) \mid \exists \mu' \in r, \text{ so dass } \mu = \mu'[Y] \wedge \mu' \text{ erfüllt } \alpha\}$$
$$\equiv$$
$$(\textit{Definition der Selektion}, \mathrm{attr}(\alpha) \subseteq Y)$$
$$\sigma[\alpha](\{\mu \in \mathrm{Tup}(Y) \mid \exists \mu' \in r, \text{ so dass } \mu = \mu'[Y]\}$$
$$\equiv$$
$$(\textit{Definition der Projektion})$$
$$\sigma[\alpha](\pi[Y]R).$$

2)

Lösung:

$$R \bowtie R$$
$$\equiv$$
$$(\textit{Definition des natürlichen Verbundes})$$
$$\{\mu \in \mathrm{Tup}(X \cup X) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[X] \in r\}$$
$$\equiv$$
$$\{\mu \in \mathrm{Tup}(X) \mid \mu[X] \in r\}$$
$$\equiv$$
$$(X \textit{ ist Format von } R)$$
$$R.$$

3)

Lösung:

$$
\begin{gathered}
R \cap S \\
\equiv \\
(\textit{Definition des Durchschnitts}, X = Y) \\
\{\mu \in \mathrm{Tup}(X) \mid \mu \in r \wedge \mu \in s\} \\
\equiv \\
(X \textit{ Format von } R, Y \textit{ Format von } S) \\
\{\mu \in \mathrm{Tup}(X) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[Y] \in s\} \\
\equiv \\
(\textit{Definition des Verbundes}, X = Y) \\
R \bowtie S.
\end{gathered}
$$

4)

Lösung:

$$
\begin{gathered}
\sigma[\alpha](R \bowtie S) \\
\equiv \\
(\textit{Definition des natürlichen Verbundes}) \\
\sigma[\alpha](\{\mu \in \mathrm{Tup}(XY) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[Y] \in s\}) \\
\equiv \\
(\textit{Definition der Selektion}) \\
\{\mu \in \mathrm{Tup}(XY) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[Y] \in s \wedge \mu \text{ erfüllt } \alpha\} \\
\equiv \\
(\mathrm{attr}(\alpha) \subseteq X, \mathrm{attr}(\alpha) \cap Y = \emptyset) \\
\{\mu \in \mathrm{Tup}(XY) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[Y] \in s \wedge \mu[X] \text{ erfüllt } \alpha\} \\
\equiv \\
(\textit{Definition des natürlichen Verbundes}) \\
\{\mu \in \mathrm{Tup}(X) \mid \mu[X] \in r \wedge \mu[X] \text{ erfüllt } \alpha\} \bowtie S \\
\equiv \\
(\textit{Definition der Selektion}) \\
(\sigma[\alpha]R) \bowtie S
\end{gathered}
$$

Aufgabe 2.3:

Lösung: Seien $X_1 = \{A, C\}$ und $X_2 = \{B, C\}$. Sei $\delta_1 : X \to X_1$ und $\delta_2 : X \to X_2$ Funktionen mit $\delta_1(A) = A$, $\delta_1(B) = C$, $\delta_2(A) = C$ und $\delta_2(B) = B$.

Sei dann

$$R_1 := \pi[A, B](\delta_1[X, X_1]R \bowtie \delta_2[X, X_2]R)$$

und

$$R_2 := \pi[A, B](\delta_1[X, X_1]R_1 \bowtie \delta_2[X, X_2]R)$$

Der gesuchte Ausdruck hat dann die Form $R_{trans} := R \cup R_1 \cup R_2$.

Sei weiter

$$r = \begin{array}{cc} A & B \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{array}$$

Dann ist das Tupel $(1, 5)$ in der transitiven Hülle von r, jedoch nicht in der Antwort $R_{trans}(r)$.

Aufgabe 2.4: [1]
(a)

Lösung:

$$(P(X,Y) \wedge Q(X)) \vee (P(X,Y) \wedge R(Y)),$$
$$P(X,Y) \wedge \neg\exists Z(P(X,Y) \wedge Q(X,Z) \wedge \neg R(Y,Z)).$$

(b)

Lösung:

$$P(X) \wedge \neg\exists Y(P(X) \wedge Q(Y) \wedge \neg\exists Z R(X,Y,Z))$$

(c)

Lösung:

Seien Schemata $P(A)$, $Q(B)$, $R(C)$ und $S(A,B,C)$ gegeben.

$$P \bowtie \pi[A]((P \bowtie Q) - \pi[A,B]((P \bowtie Q \bowtie R) - S))$$

[1] Grundlage der Aufgabe ist Example 9.5 (Van Gelder und Topor, 1991).

Aufgabe 2.5:

Lösung:

Beweis mittels Induktion über die Anzahl maximal konjunktiver Teilformeln einer R-Formel. Sei $maxKon(G)$ die Zahl der maximal konjunktiven Teilformeln einer R-Formel G. Die Induktionshypothese lautet:

Für alle R-Formeln F mit $maxKon(F) \leq n$ gilt, wenn F sicher, dann F wertebereichsunabhängig.

Induktionsbasis: F besteht aus einer einzigen maximal konjunktiven Teilformel, nämlich gerade F selbst, $maxKon(F) = 1$. F enthält somit keine Quantoren, Disjunktionen und Negationen. Sei F der Form $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, $n \geq 1$. Jedes F_i, $1 \leq i \leq n$ ist atomar. Wegen F sicher ist jede freie Variable in F auch begrenzt. Damit ist F offensichtlich wertebereichsunabhängig.

Induktionsschluss: Sei F eine R-Formel mit $maxKon(F) = n + 1$. Gemäß der Definition einer R-Formel ist F entweder aus einer R-Formel G_1 durch Anwendung des $\exists$-Operators auf G_1 oder Anwendung der Negation $\neg$ auf G_1 gebildet, oder durch Anwendung einer Disjunktion $\vee$ oder Konjunktion $\wedge$ auf R-Formeln G_1 und G_2.

$F = \neg G_1$: Da F sicher, dürfen in G_1 keine freien Variablen vorkommen. Damit ist F wertebereichsunabhängig.

$F = \exists X G_1$: Da F sicher, ist auch G_1 sicher. Da $maxKon(G_1) < maxKon(F)$ ist G_1 wertebereichsunabhängig. Da F eine freie Variable weniger als G_1 enthält, ist F ebenfalls wertebereichsunabhängig.

$F = G_1 \vee G_2$: Da F sicher sind auch G_1 und G_2 sicher. Da $maxKon(G_1)$, $maxKon(G_2) < maxKon(F)$, sind G_1 und G_2 wertebereichsunabhängig. Da weiter G_1 und G_2 dieselben freien Variablen besitzen, folgt aus der Wertebereichsunabhängigkeit von G_1 und G_2 auch die Wertebereichsunabhängigkeit von F.

$F = G_1 \wedge G_2$: Sei $G_1 = G_{11} \wedge \ldots G_{1u}$ und $G_2 = G_{21} \wedge \ldots G_{2v}$, $u, v \geq 1$. Sind alle G_{ij} atomar, dann ist aufgrund der Induktionsbasis, wegen F sicher, F wertebereichsunabhängig.

Seien $H_1, \ldots, H_k$, $k \geq 1$, die nicht atomaren Teilformeln unter den G_{ij}. Wir betrachten dann anstatt F die R-Formel $F' = G'_1 \wedge G'_2$, wobei $G'_1 = H_1$ und G'_2 die Konjunktion aller G_{ij} außer H_1. Offensichtlich sind F und F' äquivalent und F sicher genau dann, wenn F' sicher.

Aus F' sicher folgt H_l, $1 \leq l \leq k$ sicher, sofern H_l nicht negiert. Ist H_l negiert, d.h. der Form $H_l = \neg H'_l$, dann ist H'_l sicher. Da $maxKon(G'_1)$, $maxKon(G'_2) <$

maxKon(F), sind alle nicht negierten H_l und alle H'_l wertebereichsunabhängig. Aufgrund der Begrenztheit der freien Variablen in F' folgt dann auch die Wertebereichsunabhängigkeit von F' und damit auch von F.